958. 群ノ表現ノ Kronecker product ニ就イテ

大島 勝（高知高校）

次ノ定理ノヲ証明シ，ソノ應用特ニ Brauer-Nesbitt ノ未解決ノ問題（Ann. Math. 42, 2）即チ

$F_\kappa \times F_\lambda \longleftrightarrow \sum_\mu a_{\kappa\lambda\mu} F_\mu$ ナルトキハ $U_\mu \times F_{\lambda'} \cong \sum_\kappa a_{\kappa\lambda\mu} U_\kappa$ ナルコトヲ証明スルノが本稿ノ目的デアル。コヽニ

$F_\kappa \times F_\lambda \longleftrightarrow \sum_\mu a_{\kappa\lambda\mu} F_\mu$ ハ $F_\kappa \times F_\lambda$ が既約成分 F_μ ヲ $a_{\kappa\lambda\mu}$ 個有スルコトヲ意味シ，$F_{\lambda'}$ ハ F_λ ノ contragredrient ナ representation ヲ示ス。

1. 有限群 $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ体 K ニ於ケル正規表現ヲ R デ表ハス。

定理 1. $\mathfrak{G}$ ノ K ニ於ケル任意ノ表現ヲ $G \longrightarrow \nabla(G)$，$\nabla(G)$ ノ次數ヲ m トスレバ

$$\nabla \times R \cong \begin{pmatrix} R & & & 0 \\ & R & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R \end{pmatrix}$$

コヽニ R ハ m 個現ハレル。従ッテ mR デ表ハスコトニスル。

（証明）$\mathfrak{G}$ ノ元ヲ $G_1, G_2, \cdots\cdots, G_t$ デ表ハス。
$G_i G_j = G_k$ デアレバ

$$
R(G_i)=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{ccc}
* & 0 & * \\
 & \vdots & \\
0 \cdots & 1 & \cdots 0 \\
 & \vdots & \\
* & 0 & *
\end{array}\right) \\
k &
\end{array}
$$

従ツテ $mR \cong S$，ココニ S ハ

$$
S(G_i)=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{ccc}
* & 0 & * \\
 & \vdots & \\
0 \cdots & E & \cdots 0 \\
 & \vdots & \\
* & 0 & *
\end{array}\right) \\
k &
\end{array}
$$

E ハ m 次ノ単位行列ナル $\mathfrak{G}$ ノ表現デアル。

$\nabla \times R$ ヲ ∇^* デ表ハスコトニスレバ

$$
\nabla^*(G_i)=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{ccc}
* & 0 & * \\
 & \vdots & \\
0 \cdots & \nabla(G_i) & \cdots 0 \\
 & \vdots & \\
* & 0 & *
\end{array}\right) \\
k &
\end{array}
=\left(\begin{array}{ccc}
 & 0 & \\
* & \vdots & * \\
 & \vdots & \\
0 \cdots & \nabla(G_k)\nabla(G_j^{-1}) & \cdots 0 \\
 & \vdots & \\
* & 0 & *
\end{array}\right)
$$

$\left(\because \quad G_i = G_k G_j^{-1}\right.$ ヨリ $\left.\nabla(G_i)=\nabla(G_k)\nabla(G_j^{-1})\right)$

$$
P=\begin{pmatrix}
\nabla(G_1^{-1}), & & & 0 \\
 & \nabla(G_2^{-1}) & & \\
 & & \ddots & \\
0 & & & \nabla(G_t^{-1})
\end{pmatrix}
$$

トオケバ

$$
P^{-1} = \begin{pmatrix} \nabla(G_1) & & & 0 \\ & \nabla(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nabla(G_t) \end{pmatrix}
$$

トナリ，明カニ

$$
\begin{pmatrix} \nabla(G_1^{-1}) & & & 0 \\ & \nabla(G_2^{-1}) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nabla(G_t^{-1}) \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ * & & \vdots & & * \\ 0 & \cdots & \nabla(G_i)\nabla(G_j^{-1}) & \cdots & 0 \\ * & & \vdots & & * \\ & & 0 & & \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \nabla(G_1) & & & 0 \\ & \nabla(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nabla(G_t) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ * & & \vdots & & * \\ 0 & \cdots & E & \cdots & 0 \\ * & & \vdots & & * \\ & & 0 & & \end{pmatrix}
$$

即チ $P(\nabla \times R)P^{-1} = S \cong mR$

q. e. d.

〔注意〕 R ガ完全可約ノトキハ $\nabla \times R$ ト mR ノ character ガ一致スルコトカラ定理1ハ直チニ証明出来ル。

系1. $\mathfrak{G}$ ノ二ツノ表現 $\nabla(G)$, $\mathbb{W}(G)$ ノ次数ガ一致スレバ

$$
\nabla \times R \cong \mathbb{W} \times R
$$

系2. $\mathfrak{G}$ ノ表現 $\nabla(G)$ ノ次数ヲ m トスレバ

$$mR \cong \begin{pmatrix} \nabla & & 0 \\ & * & \\ * & & \ddots \; * \end{pmatrix}$$

証明

$$R \cong \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & * & \\ * & & \ddots \; * \end{pmatrix}$$

ナル故

$$\nabla \times R \cong \begin{pmatrix} \nabla & & 0 \\ & * & \\ * & & \ddots \; * \end{pmatrix}$$

従ッテ定理1ニヨリ，求ムル結果ヲ得ル。系2ハ既ニ正田先生ノ証明サレタモノデアル。

尚定理1ハ次ノヤウニ拡張サレル。$\mathfrak{g}$ ヲ有限次又ハ無限次ノ群，$\mathfrak{h}$ ヲ index ガ有限ナル $\mathfrak{g}$ ノ部分群トスル。$\mathfrak{h}$ ノ 1-representation ヨリ induce シタ $\mathfrak{g}$ ノ表現ヲ $\overline{R}$ デ表ハスコトニスル。

定理**2**. $\mathfrak{g}$ ノ任意ノ表現ヲ $G \to \nabla(G)$ トスレバ $H \to \nabla(H)$ ハ $\mathfrak{h}$ ノ表現ヲナス。コレヲ $\nabla(\mathfrak{h})$ デ表ハス。$\nabla(\mathfrak{h})$ ヨリ induce シタ $\mathfrak{g}$ ノ表現ヲ $[\nabla(\mathfrak{h})]^*$ デ表ハセバ $[\nabla(\mathfrak{h})]^* \cong \nabla \times \overline{R}$

証明ハ定理1ト同様デアル。$\mathfrak{h} = E$ ナルトキガ定理1ニナルワケデアル。

2. 正規表現 R ハ直既約表現 $\nabla_1, \nabla_2, \cdots\cdots, \nabla_l$ ニ

分解サレルカラ（Rガ完全可約ノトキハ $U_k = F_k$）

$$\nabla \times R \cong \begin{pmatrix} \nabla \times U_1 & & & 0 \\ & \nabla \times U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nabla \times U_l \end{pmatrix}$$

又 $_nR$ ハ勿論直既約成分 $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_l$ ＝分解サレルカラ定理1ニヨリ次ノ定理ヲ得ル。

定理3. $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ表現ヲ ∇ トスレバ $\nabla \times U_k$ ノ直既約成分ハ $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_l$ 以外ニハ現ハレナイ。即チ

$$\nabla \times U_k = \sum_\lambda a_\lambda U_\lambda$$

定理4.（Braner-Nesbitt）$F_k \times F_\lambda \leftrightarrow \sum_\mu a_{k\lambda\mu} F_\mu$ ナルトキハ $U_\mu \times F_{\lambda'} \cong \sum_k a_{k\lambda\mu} U_k$ デアル。

証明 Braner-Nesbitt ニヨリ $\varphi^{(k)} \times \varphi^{(\lambda)} = \sum_\mu a_{k\lambda\mu} \varphi^{(\mu)}$ ナルトキ $\eta^{(\mu)} \times \varphi^{(\lambda')} = \sum_k a_{k\lambda\mu} \eta^{(k)}$ ガ成立スルコトガ証明セラレテキルカラ，$\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots\cdots \eta^{(l)}$ ガ一次独立ナルコトト定理3ヲ用フルコトニヨリ求ムル結果ヲ得ル。

q. e. d.

定理5. $\mathfrak{G}$ ノ二ツノ表現 ∇, W ガ同じ既約成分ヲ有スルナラバ

$$\nabla \times U_k \cong W \times U_k$$

トナル。

証明. ∇, W ノ Character ヲ夫々 χ_1, χ_2 デ表

ハセバ $\chi_1=\chi_2$．従ッテ $\mathfrak{V}\times\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{W}\times\mathfrak{U}_k$ ノ character ハ一致スル。

$$\chi_1\times\eta^{(k)}=\chi_2\times\eta^{(k)}$$

然ルニ定理3ニヨレバ $\mathfrak{V}\times\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{W}\times\mathfrak{U}_k$ ハ共ニ $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{U}_l$ ニ分解サレルカラ $\mathfrak{V}\times\mathfrak{U}_k\cong\mathfrak{W}\times\mathfrak{U}_k$ トナル．

q. e. d.

定理6． $\mathfrak{U}_\mu\times\mathfrak{U}_{\nu'}$ ハ直既約表現トシテ $\mathfrak{U}_1$ ヲ $c_{\mu\nu}$ 個有ス。

証明． $\mathfrak{U}_{\nu'}\longleftrightarrow\sum_{\lambda'}c_{\nu'\lambda'}F_{\lambda'}$ デアルカラ定理5ニヨリ

$$\mathfrak{U}_\mu\times\mathfrak{U}_{\nu'}\cong\mathfrak{U}_\mu\times\left(\sum_{\lambda}c_{\nu'\lambda'}F_{\lambda'}\right)$$

$$\cong\sum_{\lambda'}c_{\nu'\lambda'}(\mathfrak{U}_\mu\times F_{\lambda'})$$

$$\cong\sum_{\lambda'}c_{\nu'\lambda'}\sum_{k}a_{k\lambda\mu}\mathfrak{U}_k \qquad (\text{定理3ニヨル})$$

$$=\sum_{k}\left(\sum_{\lambda}c_{\nu'\lambda'}a_{k\lambda\mu}\right)\mathfrak{U}_k$$

コヽデ $k=1$ トオケバ

$$a_{1\lambda\mu}=\begin{cases}1 & \lambda=\mu\ \text{ナルトキ}\\ 0 & \lambda\neq\mu\ \text{ナルトキ}\end{cases}$$

ナル故

$$\sum_{\lambda}c_{\nu'\lambda'}a_{1\lambda\mu}=c_{\nu'\mu'}=c_{\nu\mu}=c_{\mu\nu}$$

q. e. d.

系 $\mathfrak{U}_\mu\times\mathfrak{U}_{\nu'}$ ガ直既約成分トシテ $\mathfrak{U}_1$ ヲ有スレバ

$\mathfrak{U}_\mu$ ハ既約成分トシテ F_ν ヲ（従ッテ $\mathfrak{U}_\nu$ ハ F_μ ヲ）有ス。逆モ成立スル。

3. 最後ニ完全可約デナイ表現ト既約表現ノ Kronecker product ガ完全可約トナル例ヲ一ツ挙ゲテオキマス。

$\mathfrak{G}$ ノ group ring ガ primary decomposable デアルトスル。$\mathfrak{G}$ ノ highest kind ノ表現ヲ F_k トスル（即チ表現ノ次数ガ p^a デ割レルモノ。但シ $\mathfrak{G}$ ノ位数 $g = g'p^a, (p, g')=1$）$\mathfrak{U}_k = F_k$ デアル。$\mathfrak{G}$ ノ group ring ガ primary decomposable デアルカラ

$$\mathfrak{U}_1 \cong \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ * & & & & 1 \end{pmatrix}$$

デ $\mathfrak{U}_1$ ノ次数ハ p^a デアル。定理5ニヨリ

$$\mathfrak{U}_1 \times F_k \cong p^a F_1 \times F_k \cong p^a F_k.$$

即チ $\mathfrak{U}_1 \times F_k$ ハ p^a 個ノ既約成分 F_k ニ分解サレテ、勿論完全可約表現デアル。